Adı Soyadı: Numarası: 03.01.2020

2019-2020 GÜZ DÖNEMİ CEBİR I FİNAL SINAVI SORULARI

1) a) $\vartheta:\mathbb{Z}_{12}\to\mathbb{Z}_{12}$, $\vartheta(\overline{x})=\overline{3x}$ ile tanımlı ϑ fonksiyonu veriliyor. *Çek* ϑ ve $\operatorname{Im}\vartheta$yı belirleyiniz.

   b) $G=\langle a\rangle$ n. mertebeden devirli bir grup olsun. $(s,n)=1$ ise a^{s} de G 'nin bir üretecidir, gösteriniz.

2) a) $\phi:G\to G^{*}$ bir grup homomorfizması olsun. $K\lhd G^{*}$ ise $\phi^{-1}(K)\lhd G$ olduğunu gösteriniz.

   b) G bir grup ve $H\leq G$ olsun. Her $a\in G$ için $|H|=|Ha|$ olduğunu gösteriniz.

3) a) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{30}$ bir grup epimorfizması olsun. $\mathbb{Z}$ 'in *çek* f 'i kapsayan alt gruplarını bulunuz.

   b) G bir grup, M ve N , G 'nin iki normal alt grubu ise $MN\lhd G$ olduğunu gösteriniz.

4) a) G bir grup ve $a\in G$ olsun. Her $x\in G$ için

$$\begin{aligned} f&:G\to G\\ x&\to f(x)=axa^{-1}\end{aligned}$$

   ile tanımlı f fonksiyonu bir grup otomorfizması olur mu, araştırınız.

   b) $G=\mathbb{Z}_{18}$ ve $H_1=\langle\overline{2}\rangle, H_2=\langle\overline{3}\rangle, H_3=\langle\overline{6}\rangle, H_4=\langle\overline{9}\rangle$ G 'nin alt grupları olsun. Bu durumda $G=H_1\oplus H_4$ olur mu? Ve $G=H_2\oplus H_3$ olur mu? Araştırınız.

5) a) Mertebeleri sonlu ve aynı olan devirli gruplar izomorf olur mu, araştırınız.

   b) G bir grup , M ve H, G 'nin ve M, H'ın normal alt grubu ve H/M, G/M 'nin normal alt grubu olsun. $\psi:G/M\to G/H$, her $gM\in G/M$ için $\psi(gM)=gN$ ile tanımlı ψ homomorfizması veriliyor. Bu homomorfizmayı kullanarak

$$G/H\cong \frac{G/M}{H/M}$$

   olduğunu gösteriniz.

NOT: Sınav süresi 100 dakika olup soruların herbiri eşit puanlıdır. İstediğiniz sorudan başlayabilirsiniz. Sınav kağıdına cevaplama yapmayınız. Ek kağıt verilecektir.

BAŞARILAR

Prof. Dr. Şenol EREN

Cevap Anahtarı

1) a) $\theta : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, $\theta(\overline{x}) = \overline{3x}$ fonksiyonu veriliyor.

θ homomorfizma olur mu?

$\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_{12}$ için $\theta(\overline{a}+\overline{b}) = \theta(\overline{a+b})$
$= \overline{3.(a+b)}$
$= \overline{3a+3b}$
$= \overline{3a} + \overline{3b}$
$= \theta(\overline{a}) + \theta(\overline{b})$

$Çek\,\theta = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_{12} \mid \theta(\overline{x}) = \overline{0}\}$
$= \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_{12} \mid \overline{3x} = \overline{0}\}$
$= \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$

$Im\,\theta = \{\theta(\overline{a}) \mid \overline{a} \in \mathbb{Z}_{12}\}$
$= \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$

b) $G = \langle a \rangle$, n. mert. $(s,n) = 1$ ise $G = \langle a^s \rangle$ old. gösterelim. $x \in \langle a^s \rangle \Rightarrow x = (a^s)^t = a^{st} \in \langle a \rangle$ olduğu açıktır.

olup $\langle a^s \rangle \subseteq \langle a \rangle$

Keyfi bir $a \in \langle a \rangle$ olup $a = a^1 = a^{sk+nl}$
$= (a^s)^k (a^n)^l$
$= (a^s)^k e \in \langle a^s \rangle$

olup $\langle a \rangle \subseteq \langle a^s \rangle$ olur. $G = \langle a^s \rangle$ dir.

2) a) $\phi : G \to G^*$ homomorfizma olsun.

$K \trianglelefteq G^* \Rightarrow \phi^{-1}(K) \trianglelefteq G$ old. gösterelim.

$\phi^{-1}(K) = \{x \in G \mid \phi(x) \in K\}$

- $e^* \in G^*$, ve $\phi(e) = e^*$ o.ş. $e \in G$ vardır. Yine $e^* \in K$ olur. (Grubun birimi bütün alt gruplarının birimi ile aynıdır.)

$e \in \phi^{-1}(K)$ olup $\phi^{-1}(K) \neq \emptyset$

- $\phi^{-1}(K) \subseteq G$ old. tanımdan açıktır.
- $\forall x, y \in \phi^{-1}(K)$ için $\phi(x), \phi(y) \in K$ olur

$\phi(xy^{-1}) = \phi(x)\,\phi(y^{-1}) = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \in K$

$\Rightarrow xy^{-1} \in \phi^{-1}(K)$ olup $\phi^{-1}(K) \leq G$

- $\forall g \in G$ $\forall x \in \phi^{-1}(K)$ $gxg^{-1} \in \phi^{-1}(K)$ old gösterelim

$\phi(gxg^{-1}) = \underbrace{\phi(g)}_{\in G^*}\,\underbrace{\phi(x)}_{\in K}(\phi(g))^{-1} \in K \Rightarrow gxg^{-1} \in \phi^{-1}(K)$

$\Rightarrow \phi^{-1}(K) \trianglelefteq G$

2) b) $f : H \to Ha$ bir fonksiyon tanımlayalım.

$\forall h \in H$ için $f(h) = ha$ olsun. f'in iyi tanımlı olduğu kolaylıkla görülür. Çünkü $h_1 = h_2 \Rightarrow$ $\forall a \in G$ için $h_1 a = h_2 a \Rightarrow f(h_1) = f(h_2)$ dir.

<u>f birebirdir</u>: $\forall h_1, h_2 \in H$ için

$f(h_1) = f(h_2) \Rightarrow h_1 a = h_2 a$
$\Rightarrow h_1 = h_2$

<u>f örtendir</u>: $\forall ha \in Ha$ için $h \in H$ old. $f(h) = ha$ öş $\exists h \in H$ vardır f örtendir.

$|H| = |Ha|$ bulunur.

3) a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{30}$ bir epimorfizma olsun. $\mathbb{Z}$'in Çekf'i kapsayan alt gruplarını bulalım.

$$\text{Çekf} = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = \bar{x} = \bar{0}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0(30)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 30k, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= 30\mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$'in alt grupları $n\mathbb{Z}$ tipindedir. Çekf'yi kapsayan alt grupları ise $\{30\mathbb{Z}, 15\mathbb{Z}, 10\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\}$ olur.

ya da $\{\langle 30\rangle, \langle 15\rangle, \langle 10\rangle, \langle 6\rangle, \langle 5\rangle, \langle 3\rangle, \langle 2\rangle, \mathbb{Z}\}$ yazılır.

3 b) $M, N \trianglelefteq G \Rightarrow MN \trianglelefteq G$ olduğunu gösterelim.

Bunun için öncelikle $MN \leq G$ old. göstermeliyiz. $MN \neq \emptyset$ ve $MN \subseteq G$ dir.

$M, N \trianglelefteq G$ old. $MN \leq G$ old. biliyoruz. $N \trianglelefteq G$ old. $MN = NM$ oluyorsa $MN \leq G$ dir. $MN = NM$ dir.

$M \trianglelefteq G \Rightarrow \forall a \in G$ için $aM = Ma$ dır
$\forall n \in N$ için $nM = Mn$ olup

$MN \leq G$ dir. $\forall x \in MN$ için $x = mn$ öş $m \in M, n \in N$ vardır.

$\forall g \in G$,

$$gxg^{-1} = gmng^{-1} = (gm).e(ng^{-1})$$
$$= (gm)(g^{-1}g)(ng^{-1})$$
$$= \underbrace{(gmg^{-1})}_{\in M}.\underbrace{(gng^{-1})}_{\in N} \in MN$$

$\Rightarrow MN \trianglelefteq G$

4) a) $f: G \longrightarrow G$
$x \longrightarrow f(x) = axa^{-1}$ olsun.

f homomorfizma olur mu?

$\forall x,y \in G$ için $f(xy) = a(xy)a^{-1}$
$= (ax)(a^{-1}.a).ya^{-1}$
$= (axa^{-1})(aya^{-1})$
$= f(x).f(y)$

$Çek f = \{x \in G \mid f(x) = e\}$
$= \{x \in G \mid axa^{-1} = e\}$
$= \{x \in G \mid xa^{-1} = a^{-1}\}$
$= \{x \in G \mid x = e\}$
$= \{e\} \Rightarrow f$ birebir

$\forall g \in G$ için $f(g') = ag'a^{-1} = g$ o.ş. $g' \in G$ bulmalıyız. $g' = a^{-1}ga$ seçilirse $\forall g \in G$ için

$f(g') = f(a^{-1}ga) = a(a^{-1}ga)a^{-1}$
$= e.g.e = g$ o.ş. $g' \in G$ vardır

O halde f bir otomorfizmadır

b) $\mathbb{Z}_{18} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}\}$

$H_1 = \langle \overline{2} \rangle = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{0}\}$

$H_2 = \langle \overline{3} \rangle = \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{0}\}$

$H_3 = \langle \overline{6} \rangle = \{\overline{6}, \overline{12}, \overline{0}\}$

$H_4 = \langle \overline{9} \rangle = \{\overline{9}, \overline{0}\}$

$G = H_1 \oplus H_4$ olur mu? Bunun için $G = H_1 + H_4$ ve $H_1 \cap H_4 = \{\overline{0}\}$ olmalıdır. $\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}_{18}$ için $\overline{x} = \overline{a} + \overline{b}$ yazılabilir ($\overline{a} \in \langle \overline{2} \rangle, \overline{b} \in \langle \overline{9} \rangle$) $G = H_1 + H_4$ ve $H_1 \cap H_4 = \{\overline{0}\}$ olduğundan $G = H_1 \oplus H_4$ olur.

$G = H_2 \oplus H_3$ olur mu? $H_2 \cap H_3 = \{\overline{0}, \overline{6}\}$ olduğundan yazılım tek türlü olmaz. Yani $G \neq H_2 \oplus H_3$ dür

5) a) Mertebeleri sonlu ve aynı olan devirli gruplar izomorf olur mu, düşünelim.
G ve G', her ikisi de n. mertebeden devirli gruplar olsun. $G \cong G'$ olur mu?
$f: G \to G'$, $G = \langle a \rangle$, $G' = \langle b \rangle$ olan n. mertebeden grup olsun.

$\forall a^i \in G$ için $f(a^i) = b^i$ ile tanımlayalım.
f iyi tanımlıdır: $a^i = a^j \Rightarrow a^{i-j} = e$
$\Rightarrow n \mid i-j$
$\Rightarrow i-j = nk$
$\Rightarrow i = j+nk$

$f(a^i) = b^i = b^j . (b^n)^k = b^j . e = b^j = f(a^j)$

f homomorfizmadır: $\forall a^i, a^j \in G$ için
$f(a^i . a^j) = f(a^{i+j}) = b^{i+j} = b^i b^j = f(a^i) f(a^j)$

$Çekf = \{a^i \in G \mid f(a^i) = e_{G'}\}$
$= \{a^i \in G \mid b^i = e_{G'}\}$
$= \{a^i \in G \mid o(b) \mid i\}$
$= \{a^i \in G \mid n \mid i\} = \{a^{nk} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$= \{e_G\} \Rightarrow f$ birebir

f örtendir: $\forall y \in G'$ için $y = b^i$ o.ş. $i \in \mathbb{Z}$ vardır. $f(a^i) = b^i$ old. $a^i \in G$ vardır. $G \cong G'$ olur.
Yani $f(a^i) = b^i = y$ o.ş. $\exists a^i \in G$

2. Yol: Teoreme göre n. mertebeden sonlu mertebeli bütün devirli grupların $\mathbb{Z}_n$'e izomorf old. biliyoruz.
O halde $G \cong \mathbb{Z}_n$ ve $G' \cong \mathbb{Z}_n$ dir
"$\cong$" geçişme öz. $G \cong G'$ elde edilir.

5 b) ψ örtendir: $\forall gH \in G/H$ için $g \in G$ olup $gM \in G/M$ dir

$\psi(gM) = gH$ aş $\exists gM \in G/M$ old. ψ örtendir

ψ epimorfizmadır

$$\text{Çek}\,\psi = \{gM \in G/M \mid \psi(gM) = H\}$$
$$= \{gM \mid gH = H\}$$
$$= \{gM \mid g \in H\} = H/M$$

1. izomorf teo göre

$$\frac{G/M}{H/M} \cong G/H.$$